Acercamiento a la validación en Matemática de estudiantes de pre-grado en clases ordinarias

Barreiro, Patrícia[1]; *Carnelli, Gustavo*[2]; *Falsetti, Marcela*[3]; *Leonián, Paula*[4]

Universidad Nacional de General Sarmiento. Juan María Gutiérrez 1150.
Los Polvorines. Pcia. de Buenos Aires.1: pbarreir@ungs.edu.ar; 2: gcarnell@ungs.edu.ar;
3: mfalse@ungs.edu.ar; 4: pleonian@ungs.edu.ar

Resumen

Interesados por el aprendizaje de la validación en Matemática en situación de aprendizaje en estudiantes que se inician en los estudios universitarios, presentamos aquí un análisis de las producciones de los estudiantes en varias clases de función lineal y cuadrática, cuyas actividades para el aprendizaje fueron diseñadas con énfasis en validación. Tomamos como ejes para el análisis el uso de los significantes y la asignación de significados, las acciones de validación puestas en juego y las interacciones que se dan en el aula (entre pares y con el profesor). Las actividades fueron aplicadas en dos cursos de Matemática del Curso de Aprestamiento Universitario de la Universidad Nacional de General Sarmiento; en uno de ellos el profesor estaba al tanto de las intenciones y objetivos perseguidos y fue orientado sobre cómo gestionar la clase; en el otro curso, el profesor solo dispuso de los enunciados de las mismas actividades, que eran las usuales de la asignatura con algunas modificaciones que pusieran en juego más aspectos de validación.

Observamos que en el trabajo entre pares, las producciones realizadas quedaron en un plano de escasa generalidad, siendo muy bajo el uso de significantes y su correspondiente asignación de significados. Por su parte, estos elementos se enriquecen durante el intercambio con el docente, en donde las producciones de los estudiantes se acercan más a lo esperado.

Palabras clave: *Validación; Aprendizaje de la Matemática; Interacciones; Función lineal y cuadrática.*

1. Introducción

En este trabajo nos referiremos a la validación en Matemática realizando un análisis en clases de Matemática preuniversitaria de comisiones del Curso de Aprestamiento Universitario de la UNGS. Tomamos la validación en Matemática en situación de aprendizaje en un sentido amplio considerando que se validan tanto las conjeturas de una propiedad o atributo de un objeto, como las aseveraciones que funcionan como teoremas en acto (Vergnaud, 1990), como los procedimientos puestos en juego frente a situaciones para resolver o responder a ellas. Además pensamos esta actividad no sólo circunscripta a una situación de validación en el sentido de Brusseau (1995), en donde el debate entre pares, en relación de simetría, juega un rol importante así como la dinámica de defensa e interpelación de una aseveración construida para dar respuesta o solución a una situación adidáctica, sino que también incluimos otros momentos de la clase en los que se justifica apelando a resultados ya vistos y se dan razones de por qué funcionan, o no, ciertos algoritmos, planteos y procedimientos. Pensamos que el enfoque que damos al estudio de la validación en la clase de Matemática en este trabajo podrían servir como punto de reflexión para propuestas más acordes a lo realizable y reproducible en nuestros establecimientos. Realizamos el análisis de clases de dos comisiones diferentes que compartieron la misma secuencia de actividades, sobre función lineal y cuadrática, y que fueron gestionados por docentes distintos. En las secuencias de actividades se identificaron a priori cuestiones en donde se hace evidente la posibilidad de validar ciertos conocimientos matemáticos. Cabe aclarar que, respecto de la gestión de las clases observadas, uno de los docentes estaba en conocimiento de que se debía hacer hincapié en la validación de dichas cuestiones identificadas a priori y el otro llevó adelante sus clases sin este condicionamiento. En este artículo mostramos algunas de las cuestiones a validar que se pusieron de manifiesto en ambas clases, cómo se pusieron de manifiesto y las analizamos mediante algunas categorías que contemplan la dimensión cognitiva y la comunicativa.

2. Marco Teórico

Dar cuenta acerca de la validez en Matemática exige la internalización de leyes lógicas, de un sistema –externo al sujeto– según el cual se organizan los objetos matemáticos, sus relaciones, propiedades y operaciones y también la adquisición de simbolizaciones específicas y de "artefactos" específicos (tablas, esquemas, gráficos, dibujos, etc.) como formas de expresión del saber. La "prueba matemática" y la "demostración matemática" son las formas usuales de validación. En el paradigma clásico, la demostración se presenta como una sucesión finita de deducciones encadenadas por inferencias lógicas partiendo de un número finito de principios que se asumen como válidos, aún cuando no han sido deducidos de otros, que son los axiomas (Barreiro, P. y otros, 2008)). El método de validación bajo este paradigma no es empírico, ni de observación, ni fáctico. Trascendiendo los paradigmas, deductivo o cuasi empírico, podemos decir que la validación en Matemática depende de "convenciones" en el seno de una comunidad científica que comparte ciertos principios, en el caso del paradigma deductivo sería la aceptación de una serie de axiomas organizados en un *sistema axiomático* y la asunción de las leyes lógicas que se usan en las deducciones (Barreiro, P. y otros, 2008). Entendemos entonces, que la validación en Matemática, al igual que otros tipos de validaciones científicas o tecnológicas, resulta de una serie de tradiciones y acuerdos en el seno de una comunidad, en este caso la matemática, sobre lo que es correcto y verdadero y sobre los medios, lógicos y simbólicos, que permiten divulgarlo y luego aceptarlo. Este carácter institucional([1]) que tiene la validación le confiere una componente social y comunicativa que se pone en juego al momento de aceptar como matemáticamente válido un cierto conocimiento, pues para ello debe existir una teoría o método consolidados, comunicados y científicamente aceptados, capaces de explicarlo o de mostrar cómo se construyen los principios que rigen como autoridad en ese campo de saber (Barreiro, P. y otros, 2008).

En el ámbito de la Didáctica de la Matemática, el término "validación" cobra fuerza a partir de los trabajos de la Escuela Francesa (ver Brousseau, 1995; Balacheff, 1987). En este marco, la validación consiste en el empleo de recursos de tipo técnicos, teóricos disciplinares y argumentativos –por parte del que aprende– para garantizar la validez de un resultado formulado. El despliegue de los recursos es incentivado por la inserción del sujeto que aprende en un ámbito social, ya que es frente a este ámbito que debe dar garantías de validez (Barreiro, P. y otros, 2009). Nosotros decidimos abordar la validación en un sentido amplio, no sólo circunscripta a la

[1] Nos referimos a la Ciencia Matemática como institución, ver Chevallard, 1992; Godino y Batanero, 1994)

demostración matemática, con el propósito de aproximar las formas de validación en el aula y escolares a las formas institucionalizadas de la Matemática. Nos manejamos con la siguiente definición: "*Entendemos la validación de un conocimiento matemático en situación de aprendizaje como el resultado de un proceso del sujeto por el cual éste es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento o razonamientos son o no correctos o un razonamiento es o no válido. Al manifestar sus razones debe hacer explícitos los sentidos de los objetos matemáticos que manipula y estos sentidos deben corresponderse con los significados aceptados por la Institución Matemática*" (Falsetti y otros, 2004):

Para validar, el estudiante debe apropiarse de recursos técnicos y competencias argumentativas que permitan defender su producción en un ámbito social, así como también apropiarse de símbolos, principios y prácticas, para confrontar su conocimiento personal con el institucionalizado. Uno de nuestros propósitos es conocer los recursos personales de los estudiantes en lo que llamamos "*proceso hacia la validación*", esto es, el proceso previo al de validación en el cual un estudiante avanza con acciones y formas de elaborar razones para justificar lo que hace o por qué lo que hace es correcto. Lo que entendemos como "proceso hacia la validación" está relacionado con lo que Balacheff considera como "proceso de validación" (Balacheff, 1987) el cual "*consiste en asegurarse las garantías necesarias de un compromiso en la acción; en este caso la acción de decidir sobre la verdad de una aserción*". Según este autor, el proceso de validación es todo aquello que se genera y manifiesta dentro de una situación de validación, como la toma de conciencia de las contradicciones, la elaboración de pruebas de distinto tipo, la argumentación y la refutación como parte de la misma, etc.

Consideramos que la validación en Matemática en situación de aprendizaje, *"conlleva una confrontación del conocimiento personal con un sistema externo al sujeto, constituido y estructurado por reglas consensuadas en el seno de una comunidad (el grupo de pares, la clase, el profesor como representante de la Matemática escolarizada o la Matemática científica, etc.). Se espera que el estudiante, especialmente el universitario, evolucione en su aprendizaje hacia un tipo de validación cuyo sistema de métodos, reglas y símbolos trascienda lo personal e informal, determine el alcance del conocimiento, evidencie la apropiación adecuada de símbolos y de sus significados institucionales, lo cual implica saber cómo esos símbolos son usados en la ciencia y cuáles son los significados científicos"* (Barreiro, P. y otros, 2009).

Para un mejor análisis de las prácticas, principios y símbolos usados en este proceso personal de validación consideramos importante tener en cuenta (Barreiro, P. y otros, 2009):

- *uso de significantes (términos y símbolos específicos de la disciplina), en el registro oral y escrito,*
- *relación entre el uso de significantes y asignación de significado en ambos registros,*
- *acciones de validación puestas en juego,*
- *relación entre las interacciones y la validación del conocimiento,*
- *formas personales y apelación a las formas externas* (institucionales) de expresar y fundamentar el funcionamiento de un procedimiento o la veracidad de un enunciado,

- *importancia del ámbito social*, por un lado, para incentivar el surgimiento de las formas de validación y por otro, como referente para establecer los alcances de las mismas.
- *intencionalidad de confrontación de la producción propia con esquemas externos con el propósito de "ampliar la garantía de lo correcto" del ámbito personal al grupal o al institucional,*
- *predisposición, actitudinal y práctica, del individuo o del grupo, de aceptar modos de garantizar validez que son de tipo institucionales y responder según esos modos.*
- *efectos de la retroacción de la actividad planteada para favorecer la validación.*

Lo más identificable, y objetivo, en un proceso hacia la validación son las acciones, entre las cuales enunciamos: *A1* Hacer ensayos o intentos / *A2* Usar fórmulas, definiciones o procedimientos desconectados de la actividad a resolver / *A3* Usar fórmulas, definiciones o procedimientos conectados a la actividad a resolver / *A4* Identificar alguna regularidad a partir de una cierta cantidad de casos particulares./ *A5* Enunciar ambigüedades / *A6* Ejemplificar / *A7* Anticipar, predecir / *A8* Elegir entre varias opciones dadas justificando su elección / *A9* Encontrar analogías o similitudes / *A10* Describir (mostrar pasos y procedimientos) / *A11* Ejemplificar mostrando regularidades / *A12* Imitar (reproducir una estructura de razonamiento o procedimiento) / *A13* Explicar (dar razones y relaciones) / *A14* Comparar (establecer semejanzas y diferencias) / *A15* Justificar por la "autoridad" / *A16* Reconocer contradicciones / *A17* Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen / *A18* Enunciar la negación de una regla, propiedad, etc. / *A19* Identificar condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas / *A20* Derivar conclusiones con premisas dadas / *A21* Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y deriva una conclusión) / *A22* Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez). / *A23* Apelar a un registro semiótico para validar lo producido en otro (ejemplo: mostrar las propiedades de un gráfico para validar una propiedad algebraica) / *A24* Exhibir un "formato matemático" para ser adaptado a una producción personal

3. El contexto de las clases que se analizan

Los protocolos que se analizamos son de clases de la asignatura Matemática del Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) de la Universidad Nacional de General Sarmiento, de carácter de pre-grado, obligatorio para todos los aspirantes a ingresar a esta universidad de las distintas carreras. Tiene una duración de ciento cuatro horas, repartidas en dos encuentros de dos horas semanales. El estudiantado es bastante heterogéneo pues proviene de distintas escuelas secundarias de la zona y tienen diferentes experiencias educativas. En el CAU se busca la participación activa de los estudiantes, su desinhibición frente a la Matemática y también favorecer razonamientos, construcciones conceptuales, resolución de problemas, desarrollar un espíritu cuestionador.

Los registros analizados provienen de cuatro clases sobre el tema *función lineal* y cinco clases sobre el tema *función cuadrática,* que fueron impartidas en dos comisiones de estudiantes, de entre dieciocho y treinta años de edad, con diversidad de formación previa. Ambas comisiones tenían un promedio de veinticinco estudiantes que habían mostrado hasta el momento desempeños similares. Podría decirse que cada una de ellas representa a un “grupo estándar de alumnos” que cursa el CAU. Las clases se dictaron luego de transcurridas diez semanas desde el inicio del curso y realizadas en el tiempo estipulado por el cronograma del mismo. La gestión estuvo a cargo de profesores diferentes que contaban con la misma secuencia de actividades. Éstas últimas fueron diseñadas con el propósito de que los resultados obtenidos por los alumnos en respuesta a las situaciones planteadas fueran interpelados para que ellos den razones y justificaciones sobre los mismos, haciendo hincapié en la elaboración de explicaciones y búsqueda de fundamentos. Se lograban efectuar dos actividades por clase en promedio.Las comisiones tenían las siguientes características:

- En el grupo 1: las clases eran guiadas por el docente, quién estaba al tanto de la finalidad que perseguían las actividades, contaba con una guía escrita sobre los propósitos específicos en validación y actuaba en consecuencia. La modalidad de las clases consistió en hacer que los alumnos intentaran individualmente resolver lo planteado o responder las preguntas de las consignas en un tiempo pre asignado. Mientras, el profesor, paseando por los bancos, atendía consultas y orientaba. Luego el profesor en el frente, recogía, estimulando mediante preguntas, los aportes sobre las resoluciones de aquellos alumnos que voluntariamente intervenían tratando de apuntar no sólo a los objetivos de aprendizaje de la clase sino también a las cuestiones a validar conocidas por el profesor de antemano. Entre pares no había intercambio.

- El grupo 2: usaba las mismas actividades que el grupo 1 pero el docente no contaba con las indicaciones sobre como usarlas en la clase en relación a la validación. Las actividades eran encaradas, leídas e interpretadas, en pequeños equipos con intercambio entre pares en unos diez a quince minutos mientras, el profesor atendía a las preguntas de los equipos. Luego el profesor en el frente también recogía los aportes de los diferentes equipos apuntando a los objetivos de aprendizaje de la clase.

Los registros de clases fueron grabaciones de la clase apoyadas por notas tomadas por un observador. Los insumos de análisis son las desgrabaciones.

4. Implementación

4.1. Función lineal

Los contenidos versaron sobre la función de proporcionalidad directa, la función lineal afín, la determinación de la fórmula de la función de acuerdo a los datos, la representación gráfica y la posición relativa de rectas que representan funciones lineales. En las actividades preponderaban el registro numérico o gráfico para la presentación de los datos de la situación. Respecto a las cuestiones a validar que pueden desprenderse de las actividades y a las que nos referiremos en este trabajo son las que figuran en la siguiente tabla

<table>
<tr><th>Actividad</th><th>Cuestiones a validar</th></tr>
<tr><td>

Consigna 1: *Se obtuvo información de la posición P en el instante t de un automóvil que atraviesa mojones de la ruta 2. Los datos se muestran en la siguiente tabla.*

t (tiempo)	*P (posición)*
h	*Km*
2	*160*
4	*320*

a) Estimar la posición a la que se encontraría el móvil a las 3 hs. Explique qué procedimiento utilizó y por qué lo hizo así.
b) Si lo considera necesario, agregue algún dato para que otra persona que resuelve el problema lo interprete como usted.

Consigna 2: *La población argentina en el año 1980 era de aproximadamente 25 millones. En 1990 había crecido hasta alcanzar 30 millones.*
a) ¿Puede estimar con estos datos la población en el 2010?
b) De acuerdo con lo razonado en el item anterior estime la población en 1930.
c) ¿Qué puede decir de los resultados en el item b)?Relacione la respuesta con lo considerado en a)

Consigna 3: *Se presentaban distintos gráficos en los cuales algún punto correspondía a los datos y había que elegir entre ellos cuál era el que representaba la situación y para la consigna 2 solicitaba que se pensara un gráfico que pudiera describir al crecimiento de la población.*

</td><td>

a) el uso de la regla de tres.
b) La relación entre la representación gráfica y la analítica de la la proporcionalidad directa.

</td></tr>
<tr><td>

Consigna 4: *Se obtuvo información de la posición P en el instante t de un automóvil que atraviesa mojones de la ruta 2. Los datos se muestran en la siguiente tabla.*

t (tiempo)	*P (posición)*
0	*40*
2	*200*
4	*360*

a) Estimar la posición a la que se encontraría el móvil a las 3 hs. Explique qué procedimiento utilizó y por qué lo hizo así.
b) Si lo considera necesario, agregue algún dato para que otra persona que resuelve el problema lo interprete como usted.

</td><td>

c) Que en una función lineal con ordenada al origen distinta de 0 las variables no son proporcionales (o no vale la regla de tres).
d) Que en una función lineal las variaciones en las ordenadas y en las abscisas de dos pares de puntos cualesquiera son proporcionales.

</td></tr>
</table>

A continuación hacemos un análisis de los aportes de los estudiantes en las clases en relación con estas cuestiones.

El uso de la regla de tres

Hemos observado que la regla de tres es un recurso que los alumnos usan asiduamente cuando tienen cantidades que varían y tienen que calcular una de ellas. En la gran mayoría de los casos, no comprueban la forma en que esas cantidades varían, ni los supuestos o condiciones subyacentes que hay que tener en cuenta para que la regla funcione. Por otro lado, la regla y su ordenada ejecución es considerada, por sí sola, un mecanismo que garantiza la validez del resultado, aún en casos en que no corresponde usarla. Uno de los propósitos de la primera actividad era desnaturalizar la aplicación de esta regla y revalorizar las definiciones o deducciones matemáticas que le dan sentido a su aplicación. Para ello se trabajó con las consignas 1 y 2 de arriba.

En el Grupo 1, se pusieron en común distintos procedimientos: la regla de tres con y sin reducción a la unidad, también la obtención de la fórmula P = 80.t mediante la determinación de la proporción: $\frac{160}{2} = \frac{320}{4} = 80$. Nadie hizo alusión a la condición de proporcionalidad de las variables y a lo que significa para poder usar estos procedimientos aún cuando estaba solicitado. Es el profesor quien se refiere explícitamente a la proporcionalidad y a su relación con la regla de tres como lo vemos en el siguiente párrafo:

El profesor propone afinar el uso de la regla de tres.

Alumno2 dice "le agrego 80".

Alumna 6 dice que la velocidad es constante.

El profesor pregunta si todos asumen que la velocidad es constante.

La misma alumna señala que el problema no dice nada sobre la velocidad.

El profesor aclara que ese es el supuesto que hay que tener en cuenta para que los procedimientos mostrados tengan validez. Pregunta cuándo se puede usar la regla de tres.

Alumno 5 responde: ¨cuando son números comunes, bah cuando son múltiplos¨

Alumno 1 habla de una suma, dice que para un tiempo t, d es 80 veces más que el anterior.

El profesor escribe en el pizarrón: $\frac{160}{2} = \frac{320}{4} = 80$

d es la distancia recorrida en un tiempo, t

$\frac{d}{t} = \frac{160}{2} = \frac{320}{4} = 80$*, t . 80 = d*

El profesor dice que esto se llama proporción, que es la igualdad de dos razones, y cuando pregunta si recuerdan cuando usaron esto, un alumno responde que lo vieron con Thales (se refiere al Teorema de Thales visto en el curso unas clases antes).

Dice que se puede usar uno de los pares del problema y la condición de proporcionalidad entre los pares pues se asume velocidad constante y escribir la siguiente proporción: $\frac{d}{3} = \frac{160}{2}$*, por lo tanto* $d = \frac{160}{2}.3$*. Cuando el profesor pregunta de qué otra forma puede ser escrita la operación, el Alumno 1 responde* $\frac{160\ .3}{2}$ *. El profesor señala que eso es lo que hacen cuando* *aplican la regla de tres y pregunta cuál es la proporción que hay detrás de la misma, en el pizarrón está escrito* $\begin{array}{l} a \to b \\ c \to x \end{array}$

Alumno 1 responde: a/b=c/x.

El profesor pregunta cuando puede usarse la regla de tres, a lo que los Alumnos 1 y 2 responden "cuando hay una proporción".

El profesor insiste sobre qué tiene que pasar para que pueda usarse esta regla.

Alumno 1 dice "para x , y se incrementa por el mismo valor"

Alumno 5 dice "tiene que ser un múltiplo"

El profesor pregunta cómo tiene que ser la fórmula.

Alumno 7 dice "x tiene que estar multiplicado por un valor constante, así se obtiene y"

Prosigue el diálogo para entender qué es la constante de proporcionalidad, haciendo estrecha referencia al problema en el cual dicha constante vale 80 y se introduce el formato general de la fórmula de una función proporcional. Finalmente el profesor anota en el pizarrón:

Dadas dos variables x e y puedo aplicar la regla de tres cuando:

y=mx o cuando $\frac{y}{x} = m$ *, para x ≠ 0 y para x = 0 vale y = 0.*

En el caso de la consigna 2 los estudiantes han propuesto que se mantiene constante la relación que cada diez años la población crece cinco millones y no supieron cómo revisarla a la luz de la incoherencia que obtuvieron en el item b) ya que bajo este supuesto la población en 1930 sería 0. Ni siquiera pudieron proponer un gráfico que cumpliera con condiciones más razonables acomodándose a los datos del problema.

En el Grupo 2, se ilustra para este tópico con el registro de observación de un equipo de cinco alumnos participativos, según la consideración del profesor. Nuestra apreciación sobre su trabajo es que fue bastante desordenado. Luego de haber leído las consignas en voz alta en el seno del equipo, el intercambio comienza del siguiente modo:

> *Alumno 1: 320 dividido 4 por 3. Es proporcional.*
>
> *Alumno 3: Hay que sacar a la hora. ¿qué hacemos? ¿gráfico o fórmula?*
>
> *Alumno 2: ¿qué ponemos? ¿que es proporcional?*
>
> *Alumno 3: Otra persona se tiene que dar cuenta cuando lo lea (de) que es proporcional.*

Aunque este alumno planteó la necesidad de precisar las condiciones de la proporcionalidad, la discusión sobre cómo debía orientarse a otro lector para que lo interpretara igual (ver consigna) consistió en dar los pasos de qué es lo que había que hacer y no de precisar la condición que justifica la ejecución de dichos pasos. La intervención que finaliza la discusión es la siguiente:

> *Alumno 2: No hay que decir cómo se hizo, tenés que poner en la lista (se refiere a la tabla) que en una hora recorre 80 km. Así cualquiera puede sacar la cuenta solo, hay que darle un dato más. Agregar el de una hora; entonces lo otro lo deducís.*

La respuesta para la consigna 2 fue la misma que en el grupo 1. Se dan cuenta de que hay una incoherencia pero no revisan el supuesto implícito de proporcionalidad.

Vemos en ambos grupos la falta de precisión en el concepto de proporcionalidad directa por lo que la regla de tres simple directa aparece como un conocimiento con razón en sí mismo. Aunque puedan operar y obtener resultados, están veladas, desde lo conceptual, las razones que justifican las operaciones y procedimientos o en todo caso aparecen esquemas de acción, por ejemplo,"hay que pasar a la unidad". En el Grupo 1, debido a la intención e intervención del profesor, y luego de bastantes intervenciones incompletas e imprecisas de los estudiantes, hay un mayor acercamiento a entender la definición de cantidades que varían en forma directamente proporcional *"x tiene que estar multiplicado por un valor constante, así se obtiene y"* y de tratar de relacionar con lo que se hace en la regla de tres. En cuanto a las acciones de validación, en ambos grupos prevalece el "usar fórmulas y procedimientos conectados con la actividad a resolver". (A3)¨ en ambas consignas. En la consigna 2, el reconocer la incoherencia del resultado obtenido por el procedimiento usado, no fue usado como razón para justificar el error de considerar que las cantidades varían proporcionalmente a lo largo de todo el proceso.

La relación entre la representación gráfica y la analítica de la la proporcionalidad directa.

Esto fue trabajado con la consigna 3 descripta arriba. En ambos grupos los alumnos usaron algunas condiciones necesarias de la proporcionalidad como por ejemplo que si (x,y) es un punto del gráfico entonces (kx, ky), con k real, también pertenece a él: "*Si 1 va con 80, al ½ le corresponde el 40*". Esta propiedad fue usada para descartar gráficos, si la condición no se cumplía evidentemente en el gráfico, por la forma de la curva, entonces el mismo era descartado. La relación entre la representación gráfica y la analítica de una función proporcional se trabajó sólo en el Grupo 1 mediante la explicación del profesor. Se vio que para cualquier par de puntos, si éstos estaban alineados con el (0,0) entonces, mediante semejanza de los triángulos rectángulos, puede justificarse que las variables no nulas, cuyos valores absolutos representan las medidas de los catetos, son tales que el cociente es constante, es decir son proporcionales. Los alumnos justificaron por qué los triángulos que el profesor determinó eran semejantes. No se explicó la recíproca (si las variables x, y no nulas son tales que el cociente y/x es constante entonces los puntos (x,y) están alineados) aunque se señaló que también era válida.

Vemos como recurso de validación de los alumnos en ambos grupos que "reconocen no adecuación entre la representación gráfica y el comportamiento numérico derivado de la condición analítica" (A16) para descartar gráficos. Para justificar la elección del gráfico, sólo "muestran que algunos puntos que corresponden a pares que satisfacen la condición analítica pertenecen a él" (A11).

En una función lineal con ordenada al origen distinta de 0 las variables no son proporcionales (o no vale la regla de tres). Son proporcionales las variaciones en las ordenadas y las abscisas de dos pares de puntos cualesquiera.

La función lineal afín fue introducida a través de una actividad que, adrede, tuvo un enunciado muy similar a la Consigna 1 de la actividad anterior

Hubo en ambos grupos varios alumnos que usaron regla de tres lo que muestra una vez más la persistencia del procedimiento por sobre el saber de referencia que le da validez, que sería la definición de variables directamente proporcionales.

En la puesta en común del Grupo 1 algunos alumnos explicitaron que la velocidad es constante con este razonamiento: “partiendo de los 40 km cuando está en las 2 horas lleva recorrido 160 km, entonces por hora, si la velocidad es constante, hace 80 km”. Una alumna aseguró que la velocidad no es constante porque en ese caso las variables deberían ser proporcionales y no lo eran. El profesor preguntó si había o no proporcionalidad directa, sin precisar las variables a considerar justamente para que surja la necesidad de especificarlas. Hubo varias respuestas: “para mí sí, pero no lo puedo justificar. Son proporcionales saliendo de 40”; “no, porque para t=0 la posición debería ser 0 y es 40”, “no son proporcionales porque no funciona la regla de tres” (nuevamente la regla de tres como justificación de la proporcionalidad). Es claro que en ellas se tuvo en cuenta las variables P (posición) y tiempo (t). El profesor orientó, mediante diálogo, a que tomaran como criterio de decisión que el cociente entre pares de variables correspondientes, sacados de la tabla, no es constante. Luego insistió: “pero alguna proporcionalidad hay...”. Frente a esto, un alumno respondió: “la proporcionalidad está entre la distancia recorrida y el tiempo que tarda" , frente a lo que el profesor escribió: $\frac{\Delta p}{\Delta t}=80$. Este mismo alumno sugirió la fórmula para obtener la posición según el tiempo transcurrido: "P=t por constante, que es 80, y le sumás 40". Luego el profesor trabajó con el siguiente formato genérico de una función lineal: $f:R\rightarrow R$, $f(x)=mx+b$ para mostrar que para cualquier función lineal, la proporcionalidad se da entre las variaciones de la variable dependiente respecto de la variación de la variable independiente. Escribió en el pizarrón: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(m.x_2+b)-(m.x_1+b)}{x_2-x_1}$ y preguntó: "Anticipemos... ¿qué debería dar?" En esta pregunta se quería traer lo trabajado con la situación anterior; un alumno responde: "Y...supuestamente la constante". Del cálculo algebraico se obtuvo que, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=m$., con $x_1 \neq x_2$.

En el Grupo 2 hubo algún cuestionamiento a la regla de tres para este caso. No hubo discusión sobre la proporcionalidad entre las variaciones. El profesor tomó el siguiente aporte de un equipo

> *A 360 le restamos 200, esto representa lo que avanza en dos horas y lo dividimos por 2 que es lo que avanza en una hora, entonces sacamos una fórmula:* $f(x)=\frac{160}{2}x+40$ *(la dicta) con la fórmula podemos sacar los kilómetros, x sería el tiempo*

y a partir de allí indicó él las condiciones sin problematizarlas ni validarlas.

> *P (profesor): ¿cómo podemos corroborar que la fórmula está bien?*
>
> *A (alumno): probemos con los valores que están en la tabla.*
>
> *P: ¿qué supusieron para plantear todo esto?*

Cómo nadie contesta el profesor continúa: De esta tabla no tenemos por qué suponer que siempre avanza a igual velocidad, es decir, a velocidad constante. Tuvimos que suponer que la velocidad es constante porque sino no da una recta,. ¿Con eso alcanza?

A: Ah, ¿entonces los datos son proporcionales?... Yo pensé que no.

P: No sé, ¿Qué les parece?

A4: si avanza de 0 si.

P: no avanza de 0. De la hora 0 a la hora 2 ¿cuánto avanzó, 160 km, de 2 a 4 avanza 160.

A: No da lo mismo, yo hice 360 dividido 4 y 200 dividido 2. No da igual

P: entonces...

A: no es proporcional.

P: las magnitudes no son directamente proporcionales pero si es proporcional lo que avanza comparado con el tiempo que tarda.

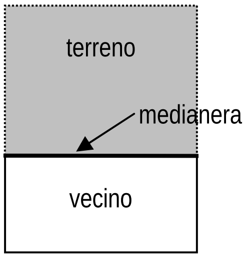
En ambos grupos se nota que “empiezan a tratar de buscar relaciones para explicar sus procedimientos” (A13), que cuando realizan los cocientes entre las variables para corroborar que no son proporcionales “usan procedimientos conectados con la actividad a resolver” (A3). Se manifiesta que sigue habiendo dificultades en interpretar qué significa la velocidad y por qué es importante explicitar que la velocidad es constante para resolver de la manera que han planteado.

4.2. Función Cuadrática

En el desarrollo del tema se trabajó sobre las características del modelo cuadrático, su representación gráfica, las distintas formas de su expresión analítica (y el pasaje de una a otra), la obtención de los elementos característicos y la producción de una expresión cuadrática a partir de ciertos datos. Algunas de las actividades y cuestiones a validar se presentan en la tabla que sigue:

Actividad	Cuestiones a validar
Consigna 1: *En un terreno, un granjero quiere delimitar una región rectangular con un alambre de 40 m para hacer una zona de cultivos. Este terreno limita con un único vecino que tiene construida su medianera de más de 40m de largo (ver esquema). Sobre dicha medianera se quiere apoyar uno de los bordes que delimitan la zona de cultivos. Todo el recinto será bordeado por el alambre, incluso el lado que está contra la medianera.* *Como el dueño de la medianera es el vecino, el granjero deberá solicitarle autorización para hacer uso de la misma, indicándole qué parte de ella será ocupada.* *a) Indicar por lo menos cuatro posibles dimensiones de la zona de cultivo, explicitando para cada caso, qué longitud estaría apoyada sobre la medianera.* *b) Responde las siguientes preguntas:* *a) ¿Cuál es el perímetro de los rectángulos que has formado?* *b) Considera el rectángulo que tiene por largo l =12. ¿Cuánto mide el ancho?* *¿Hay algún otro rectángulo que tenga su misma área? ¿Cuántos hay?* *c) Para cada uno de los casos siguientes busca formar con el hilo o dibujar rectángulos cuyas áreas:* *i. sean menor que 100; ii. estén entre 20 y 60;* *iii. sean menor que 0,5; iv. sean mayor que 110.* *En todos los casos, registra las medidas del largo de los rectángulos formados.*	*a) El comportamiento no lineal, ni siquiera a tramos, del proceso.* *b) Correspondencia entre la descripción del proceso y su gráfica.* *c) Comportamiento simétrico de las variables dependientes en relación con un valor fijo de abscisa (la abscisa del vértice).*

c) ¿Cómo debe hacerse la delimitación para que el tamaño de la zona de cultivo sea máximo?.



Consigna 2: *En esta consigna, se propuso a los alumnos una serie de seis gráficos cartesianos entre los cuáles hay que decidir cuál puede describir la situación de la consigna 1. En todos ellos había representado algún punto cuyas coordenadas correspondían a variables que satisfacían las condiciones del problema anterior.*

Consigna 3.

a) Hallar una fórmula de una función cuadrática que verifique las condiciones dadas en cada caso:
- *i) que sus raíces son 2 y –3.*
- *ii) que sus raíces son 2 y –3 y que además pase por el punto (1, 16),*
- *iii) su vértice es el punto (1; -2),*
- *iv) su vértice es el punto (1; -2) y que además pase por el punto (2, -5),*
- *v) que verifique que f(2) = f(8) = 4 y que su coeficiente principal sea –2.*

b) Decir si hay diferencias o similitudes entre los procedimientos empleados para encontrar las fórmulas.

d) La elección de la forma de escritura de la función cuadrática según los datos dados.

En lo que sigue realizamos un análisis de los aportes de los estudiantes en las clases en relación con las distintas cuestiones a validar.

El comportamiento no lineal de las variables ni siquiera a tramos.

Al trabajar con la consigna 2, en el Grupo 1, y ante la tarea de decidir si el primer gráfico (lineal por tramos) se correspondía con la situación, una alumna, a partir de la tabla que figuraba en el pizarrón como resultado de la consigna 1, mostró un esquema de cómo decidir si las variables dependían o no en forma lineal "*Haría la recta y vería si el tercero está en la recta. Tomo si se incrementa 1 la variable, cuánto baja el área. (Propone escribir lo siguiente en la tabla del pizarrón)*

+1 +1 -13 -15

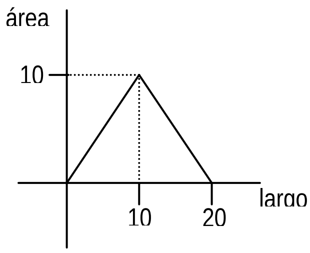
17	51
16	64
18	36

Eso estaría mostrando que los tres puntos no están alineados"

La estudiante elaboró un razonamiento simple (A21) explicando que a incrementos iguales en una variable no se dan incrementos iguales en la otra.

Correspondencia entre la descripción del proceso y su gráfica.

En el grupo 1, en un diálogo entre el profesor y los alumnos, se discutió qué gráficos de la consigna 2 se podían descartar y por qué. Dentro de los argumentos que los alumnos pusieron en juego usaron que para tramos lineales las variaciones son proporcionales: "*este gráfico informa que cuando el largo es 5 el área debería ser 50, sin* *embargo da 75" (ver gráfico de la izquierda).* Observamos que "reconocieron la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen" (A17).

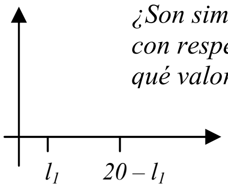


Por otro lado, relacionaron la simetría de la situación (dada por la ubicación del recinto sobre la medianera) con la simetría que debería verse en los gráficos a seleccionar, por eso descartaron los que no eran simétricos.

En el Grupo 2, una alumna mostró a sus compañeros las razones por las que realizó el descarte utilizando argumentos basados en la simetría del proceso y la adecuación de los datos del problema analizado (A13). "*El quinto (lo desechamos) porque el gráfico es irregular y debería ser regular, ya que lo que sube de un lado debería bajar del otro. Por los inversos*" (el gráfico era cóncavo en un intervalo y convexo en el otro), *"El sexto porque las medidas nunca llegan a 400. El cuarto porque está definido a partir de 20 y hay casos en el que el área es menor que 20* (en el gráfico las imágenes de 0 y 20 valen 20)*"*.

Comportamiento simétrico de las variables dependientes en relación con un valor fijo de abscisa (la abscisa del vértice).

En el Grupo 1, el profesor guió a los alumnos en la deducción de que con dos valores simétricos cualesquiera, que escribió como l_1 y $l_2 = 20 - l_1$, el área sería la misma.



¿Son simétricos con respecto de qué valor?

El gráfico de la izquierda estaba en el pizarrón cuando profesor pregunta a los alumnos: ¿En qué valor de x está el eje de simetría?
A1: En el promedio
P: Uds. Ya saben que ese valor es 10, luego el promedio de l_1 y $l_2 = 20 - l_1$ *debería dar 10.*
(Escribe: $\frac{l_1 + (20 - l_1)}{2} = 10$

Veamos que la altura es la misma… ¿da el mismo área? ¿Cómo calculo cuánto da el área?

A: A $(l_1) = l_1 \,.\, (20 - l_1)$

P: ¿Qué tendría que calcular ahora?

A: El área para $20 - l_1$

P: ¿Cuánto debería dar?

A3: El mismo valor anterior.

P: ¿Cómo se calcula la imagen de un número?

A: Se reemplaza; mi x es $20 - l_1$,

P: Cuándo sepamos hacerlo, ¿qué debería dar?¿un número o una expresión que depende de l_1*?*

A3: debería dar $l_1 \,.(20 - l_1)$

A4: tenés que reemplazarlo en el lugar de l_1 *(y hace la cuenta)*

La elección de la forma de escritura de la función cuadrática según los datos

En la consigna 3, en el diálogo entre el profesor del Grupo 1 con los estudiantes se discutieron cuáles son los parámetros que determinan el formato de la ecuación cuadrática que conviene usar y qué rol cumplen estos valores.

> *El profesor retoma para todos los alumnos de la clase un ejercicio con los siguientes datos: "sus raíces son 2 y -3, y (1,16) es un punto de la parábola"*
>
> *P: ¿Cómo armaron la fórmula? ¿en cuál de las tres formas de la función cuadrática decidieron escribirla?*
>
> *A: con la factorizada.*
>
> *P. ¿Por qué?*
>
> *A: porque me da las raíces.*
>
> *P: f(x) = (x-2).(x+3). ¿Así? (se la dicta un alumno)*
>
> *A: No sé si va 1 adelante...*
>
> *A: Hay que usar el punto, el número que va adelante...*
>
> *P: entonces es de la forma f(x) = A.(x-2).(x+3). ¿Cuáles son las funciones que solo cumplen que $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$ son sus raíces? ¿Puede ser f(x) = -1.(x-2).(x+)3? ¿Es la única que cumple lo pedido?*
>
> *A: Sí, puede ser cualquier real.*
>
> *A: Tiene que ser distinto de cero.*
>
> *P: ¿Qué significa que el punto (1,16) pertenezca a la parábola? (Analíticamente)*
>
> *A: que hay un x y un y.*

P: Que cuando a x le asigno el valor 1, el valor de y es 16. (Escribe, a medida que le dictan los estudiantes)

$$16 = A.(x-2).(x+3)$$

$$16 = A.(-4)$$

$$16 : (-4) = A$$

$$-4 = A$$

P: ¿Cuál es la función cuadrática que cumple todo lo pedido?

A: $f(x) = -4.(x-2).(x+3)$

En otro caso, el dato de la función cuadrática era sólo el vértice. Los alumnos propusieron usar la forma canónica ($f(x) = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$) y se llegó a la conclusión de que había una familia de funciones que correspondía al dato dado:

P: Y no hay más datos... ¿Cuántas funciones cuadráticas lo cumplen? (En el pizarrón figuraba: $A(x-1)^2-2$)

A: Para cada valor de A que reemplaces en la fórmula, y que tenga ese vértice.

P: Todas las funciones cuadráticas no lo cumplen, pero hay infinitas. ¿Cuáles son? ¿Qué escribirían?

A: Dependen de A

P: ¿Cuáles son? ¿Qué me decís si las tuvieras que escribir?

A: $f(x) = A.(x-1)^2 - 2$, $A \neq 0$, A número real.

En el Grupo 2 se da el siguiente diálogo entre los estudiantes y el profesor:

Bea: yo escribí esto (muestra $(x+2).(x-3)$)

Ant. Pero nos enseñaron que tenemos que cambiar los signos.

Bea: ¿por qué?

Ant: no sé.

P: (se acerca al grupo y escucha la conversación) reemplazá en 2.

Ant: da 4 el primer término.

P: ¿cuánto tiene que dar?

Ant: 0

P: entonces...

Bea: tengo que poner el opuesto para que se anule.

Observamos que en el Grupo 1, las producciones de los estudiantes, previas a la discusión conjunta, resultaron incompletas ya que no pudieron dar una respuesta correcta sobre el parámetro en la expresión factorizada. Es el intercambio con el docente el que permite a los estudiantes avanzar hasta la obtención de las expresiones esperadas. En el Grupo 2, tras una resolución en la que validan apelando a la autoridad del docente diciendo: "*nos enseñaron que tenemos que cambiar los signos*" (A15), la intervención del profesor permite que encuentren inconsistencias en sus producciones. En ambos casos recurren a "procedimientos conectados a la actividad para justificar la correspondencia entre formato y datos" (A3) y también "reconocen la adecuación del formato respecto a la situación planteada" (A 17)

5. Algunas reflexiones finales

Retomando algunas de las categorías expuestas en el marco teórico podríamos, a partir de lo analizado, concluir que si bien el desempeño de los estudiantes en ambos grupos no fue destacado, en las clases del grupo 1 hubo mayores y mejores manifestaciones respecto de las acciones de validación, el uso de los significantes y de su relación con los significados institucionales. Aquí hubo muestras de que algunos alumnos pudieron participar de una presentación del profesor en lenguaje simbólico, entendiendo y anticipando conclusiones en relación con el contexto que lo motivaba. En el grupo 2 el trabajo matemático sobre el que basaban las razones fue más de tipo numérico, con poca generalidad. Los acuerdos no involucraban argumentaciones, defensas o interpelaciones, sino que se centraban principalmente sobre modos de acción.

Las actividades presentadas a los alumnos daban lugar a la producción matemática, a la necesidad de tomar decisiones, enunciar condiciones y explicar procedimientos, justificar por qué ciertos mecanismos funcionan y bajo qué condiciones son válidos, etc. Sin embargo, el trabajo autónomo del alumno o de los equipos frente a ellas no fue suficientemente rico como para dar las respuestas esperadas. Recién con la fuerte intervención intencional del docente, en el grupo 1, hubo acercamientos de esas producciones incompletas a lo matemáticamente correcto. En el tema "función cuadrática", no encontramos en nuestros protocolos, registros que pudieran dar cuenta de algunos aspectos señalados.

Por último, señalamos que en las investigaciones que realizamos con la población, cuya producción es parte de las referencias de este trabajo, nos permiten inferir la ausencia de práctica de estos estudiantes en lo que tiene que ver con la validación. En este sentido, la predisposición actitudinal y práctica de aceptar modos de garantizar la validez y responder por ello así como también la intencionalidad de confrontación de las producciones con esquemas externos, son elementos que para estos estudiantes resultan novedosos, con lo que el trabajo con este tipo de actividades se transforma en un punto de partida del aprendizaje de este aspecto de la actividad matemática.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1987) Processus de preuves et situations de validation. Educational Studies in Mathematics. 18 (2), 147-176.

Barreiro, P., Falsetti, M., Formica, A., Marino, T., Mellincovsky, D. (2009) *Formulación de algunas categorías de análisis cualitativo para estudiar la validación en Matemática a partir de protocolos de clase.* Revista Epsilon N° 26 (2). Editor: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, pp. 39-60, España, ISSN 1131-9321.

Barreiro, P., Falsetti, M., Formica, A., Marino, T., Mellincovsky, D. (2008) *Estudio cualitativo del aprendizaje de la validación en Matemática: avances en base al análisis de protocolos*. Revista de Educación Matemática (REM), Trabajos de Investigación y Propuestas de Enseñanza, Volumen 24. Edición Digital. ISSN 0326-8780. Disponible en la página http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/digital24-1/Investigacion24-1/ Investigacion08.html. Argentina.

Brousseau, G.; (1995); Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publisher.

Carnelli, G.; Falsetti, M.; Formica, A.; Rodríguez, M. (2008) *Un estudio del aprendizaje de validación matemática a nivel pre-universitario en relación con distintas interacciones en el aula*. Revista: Suma N° 58, Editor: Federación Española de Sociedades de profesores de Matemáticas, pp. 25-40. España, ISSN 1130-488X.

Chevallard, Y. (1992); Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-111.

Falsetti, M.; Marino, T.; Rodríguez, M. (2004) *Validación en Matemática en situación de aprendizaje.* Actas del VI Simposio de Educación Matemática, Buenos Aires. Formato CD, ISBN 987-20239-2-1

Godino J., Batanero M. C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, n° 3: 325-355.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10* (23): 133-170.